

# ЗЕМНЫЕ ПРИЛИВЫ И ТОНКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

by

B. BODRI

Department of Geophysics, Eötvös University, Budapest

Received: 15 March 1974

## SUMMARY

The connection between earth tides and fine effects of the rotation of the Earth is studied. There were computed the dependence of the values of Love numbers on the frequency of forced nutation and also the amplitudes of the forced nutations. There has been found the frequency of free oscillation of the Earth corresponding to the Chandler period of the movement of the pole. All computations were made for an earth model with a liquid core and the theory took into account the effect of external and internal core on both the tidal coefficients and the rotation of the Earth. The results suggest that the dynamic effect of the liquid core on the tidal coefficients as well as on the amplitude of nearly diurnal nutation is quite negligible and it can not be found out neither from astronomical nor from tidal observations as it was considered before.

За последнее время изучение тонких закономерностей вращения Земли все больше и больше привлекает внимание астрономов и геофизиков. Открытие нутационных движений оси фигуры Земли относительно оси вращения заставляет для их интерпретации обращаться к геофизике, поскольку геофизические теории, основывающиеся на различных гипотезах о внутреннем строении Земли, могут предсказать те или иные закономерности в ее вращении.

С точки зрения кинематики общее движение Земли может быть разложено на поступательное движение и вращение бесчисленными способами. Обе эти компоненты довольно сложны. Орбитальное движение центра масс Земли под действием силы тяготения Солнца постоянно возмущается тяготением со стороны других планет солнечной системы. Вращение же относительно центра масс возмущается притяжением Солнца и Луны. Оно еще больше осложняется из-за несоответствия оси вращения с главной осью инерции и наличия неоднородностей в структуре Земли, а также вследствие постоянно происходящих перемещений масс как внутри Земли, так и на ее поверхности, вызываемых различными геофизическими процессами. Таким образом, в результате взаимного действия чрезвычайно сложно меняющихся внешних сил вращение Земли в каждый данный момент представляет собой вращение вокруг некоторой оси, проходящей через центр масс, но непрерывно меняющей свое положение и в теле Земли, и в пространстве.

Земля в целом очень близка по своим свойствам к абсолютно твердому телу, поэтому разумно ожидать, что влияние на вращение различных геофизических факторов будет иметь вид различных поправок к теоретическим законам вращения, выведенным для абсолютно твердой Земли. Определение этих поправок требует и некоторой геофизической гипотезы, и сравнения законов теоретического движения с астрономическими и геофизическими наблюдениями.

В данной работе нас интересовали поправки к теоретическим законам вращения, вызванные действием лунно-солнечного гравитационного потенциала, так называемая вынужденная нутация. Причем задача рассматривалась для модели Земли с жидким ядром. Еще Молоденский (1961) показал, как можно вывести прецессионно-нутационное движение земной оси в пространстве из разложения приливной силы. Он же обратил внимание на то, что наличие у Земли жидкого ядра, возможно, оказывает влияние на оба вышеупомянутые явления. Если бы жидкое ядро вызывало возмущающие эффекты, то это должно было бы сказаться и на суточных (тессеральных) земных приливах, и на соответствующих членах вынужденной нутации и вообще на любом явлении, связанном со смещением оси вращения Земли. Если бы возмущающие эффекты были достаточно сильны, то следовало бы пересмотреть также теорию свободной нутации (движение полюса, обнаружимое по изменению широты, которое имеет период около 450 суток).

В 1961 году Молоденский предложил красивую теорию нутации вращающегося жидкого тела эллипсоидальной формы, заключенного в твердую оболочку. Теория учитывала также и упругость оболочки Земли. Совместно с Крамер (1961) им были сделаны расчеты зависимости чисел Лява от частоты возмущающей силы, а также амплитуд различных членов вынужденной нутации. Кроме того, была вычислена частота свободных колебаний, соответствующая чандлеровскому периоду движения полюса. Расчеты были сделаны для нескольких моделей Земли.

В данной работе были проделаны расчеты, аналогичные расчетам Молоденского и Крамер (1961), однако при расчетах использовалась более подробная модель Земли, кроме того, был исправлен ряд неточностей, допущенных в статье Молоденского. Теория Молоденского, излагаемая ниже, дается уже с учетом сделанных исправлений.

Исходными уравнениями у Молоденского являются уравнения движения деформированного тела при существовании объемных сил с потенциалом  $U$ :

$$\varrho \frac{D \vec{r}}{Dt} = \varrho \operatorname{grad} U + \frac{\partial \vec{X}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{Z}}{\partial z}, \quad (1)$$

где

$\vec{r}$  — радиус-вектор текущей точки с координатами  $(x, y, z)$

$\rho$  — плотность,

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$  — векторы давления, действующие на элементы плоскости  $YZ, XZ$  и  $XY$  соответственно,  $\frac{D}{Dt}$  — полная производная по времени,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

причем точка над символом означает частную производную по времени.

В системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , левая часть уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{D \vec{r}}{Dt} = \frac{\tilde{D} \vec{r}}{Dt} = 2[\vec{\omega} \dot{\vec{r}}] + [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}] + (\vec{\omega} \vec{r}) \vec{\omega} - \vec{\omega}^2 \vec{r}. \quad (2)$$

Здесь волнистая черта означает, что производная по времени берется в подвижной системе координат. Для малых смещений, очевидно,

$$\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Общий потенциал  $U$  в данной задаче состоит из следующих членов:

1. Гравитационный потенциал всех масс Земли

$$W_0 = f \frac{M}{r}, \quad (3)$$

где  $f$  — гравитационная константа,  
 $M$  — масса Земли.

2. Потенциал центробежной силы

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 l^2 \quad (4)$$

3. Внешний лунно-солнечный потенциал

$$V_e = \frac{1}{3} \kappa \frac{g}{a} p_2^m (\cos \Theta) \cos(\sigma t - m \lambda), \quad (5)$$

где

$\sigma$  — частота приливообразующей силы,  
 $P_2^m$  — присоединенный полином Лежандра,  
 $\Theta$  — полярный угол,



$\lambda$  — долгота,  
 $g$  — ускорение силы тяжести,  
 $a$  — средний радиус Земли,  
 $\kappa = 1.836 \cdot 10^{-7}$  безразмерная константа, определяемая отношением масс Луны и Земли и среднего расстояния Земля-Луна к радиусу Земли.

К этому потенциалу следует добавить потенциал  $V_i$ , возникающий вследствие деформации Земли, а также тессеральный потенциал  $\varphi$ , вызванный нутацией оси вращения. Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  ( $p, q, r$ ), возникающий вследствие возмущающего потенциала  $V_e$  имеет вид:

$$\vec{\omega} = \omega(\varepsilon \cos \sigma t \vec{i} + \varepsilon \sin \sigma t \vec{j} + \vec{k}),$$

то есть

$$p = \omega \varepsilon \cos \sigma t$$

$$q = \omega \varepsilon \sin \sigma t$$

$$r = \omega,$$

где

$\varepsilon$  — малая величина, вызванная эффектом резонанса, зависит только от  $\sigma$ .  $\varepsilon$  определяет нутацию системы координат в пространстве (заметьте, что система координат связана с оболочкой, а не со всем телом Земли).

Таким образом, к полному потенциалу добавится еще некоторый дополнительный потенциал  $\varphi$ , вызванный нутацией оси вращения по отношению к Земле. Этот потенциал равен:

$$\varphi = -\omega^2 \varepsilon z l \cos(\sigma t - \lambda). \quad (7)$$

Учитывая конкретный вид  $\vec{\omega}$  (6), а также выражение (7), формулу (2) мы можем записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{D\dot{x}}{Dt} &= \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right) \\
 \frac{D\dot{y}}{Dt} &= \ddot{y} - 2\omega \dot{x} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right) \\
 \frac{D\dot{z}}{Dt} &= \ddot{z} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_0 + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi \right), \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$u, v, w$  — смещения в подвижной системе координат.

Для определения начальных напряжений необходимо использовать гипотезу Герглотца о том, что когда Земля находится только под влиянием невозмущенного потенциала  $W = W_0 + \varphi_0$ , то в каждый

данный момент осуществляется состояние гидростатического равновесия, описываемое уравнением Пуассона

$$\varrho_0 \operatorname{grad} W = \operatorname{grad} P, \quad (9)$$

где

$P$  — гидростатическое давление,  
 $\varrho_0$  — невозмущенное значение плотности.

Преобразуем с помощью (9) правую часть уравнения (1) и учтем (8), тогда уравнения упругости можно получить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega \dot{v} = & -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( \frac{\lambda \varrho'}{\varrho^2 W'} - 1 \right) \delta \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho} \left( \Delta u + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{\mu'}{W' \varrho} \left[ u' W' + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right]; \\ \ddot{v} + 2\omega \dot{u} = & \dots \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = & \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$\lambda, \mu$  — постоянные Ламэ,  
 $\Psi$  — новый потенциал вида

$$-\Psi = V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i + \eta + \frac{\lambda \delta}{\varrho},$$

в котором  $V_i$ , как уже было отмечено, добавочный потенциал, вызванный деформацией Земли,

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v + \frac{\partial W}{\partial z} w, \\ \delta = & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Штрих означает производную по внешней нормали к поверхности уровня потенциала.

Вместе с уравнениями (10) нужно также рассматривать уравнение неразрывности, поскольку оно определяет полное изменение плотности в фиксированной точке пространства:

$$\dot{\varrho} + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\varrho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho w) = 0, \quad (11)$$

отсюда

$$-\dot{\varrho} = \varrho \delta + \frac{\varrho'}{W'} \eta, \quad (12)$$

где

$$\Delta V_i = 4\pi f \left( \varrho \delta + \frac{\varrho'}{W'} \eta \right),$$

$\Delta$  — оператор Лапласа. Система уравнений (10)–(12) достаточна для определения всех неизвесных функций.

Во внешнем ядре при  $\mu = 0$  получаем уравнения гидродинамики. Если принять, что плотность зависит только от гидростатического давления, то можно записать:

$$\lambda \varrho' = \varrho^2 W'.$$

Тогда вместо (10) получаем систему:

$$\begin{aligned} \ddot{u} - 2\omega \dot{v} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \ddot{v} + 2\omega \dot{u} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \ddot{w} + \frac{2\sigma}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (13)$$

а уравнение (12) в этом случае эквивалентно следующему:

$$-\frac{W'}{4\pi f \varrho'} \Delta V_i = \Psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i = \frac{P}{\varrho}. \quad (14)$$

Смещения в ядре, которые мы рассматриваем, являются в случае, если движение установилось, гармоническими колебаниями с частотой  $\sigma$ . Положив

$$\ddot{u} = -\sigma^2 u, \quad \ddot{v} = -\sigma^2 v, \quad \ddot{w} = -\sigma^2 w, \quad (15)$$

мы после ряда преобразований можем свести систему (13)–(14) к системе двух уравнений в частных производных второго порядка с неизвестными функциями  $V_i$  и  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} -\frac{W'}{4\pi f \varrho} \Delta V_i &= \Psi + V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi + V_i = \frac{1}{\omega^2} F(\Psi) - \frac{2}{\sigma \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}; \\ F(\Psi) &= \frac{\omega^2}{4\omega^2 - \sigma^2} \left[ \frac{\varrho W'}{\varrho'} \left( \Delta \Psi - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \Psi' W' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{2\omega m}{\sigma l} \Psi \frac{\partial W}{\partial l} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Наиболее трудным является решение уравнений (10)–(12) для оболочки. Молоденский в своих расчетах использовал решение для сферической оболочки при  $\sigma = \omega = 0$ . Для чисел Лява ошибки порядка сжатия эквипотенциальных поверхностей ( $e = \omega^2 a/g$ ) неизбежны, а нутация, по-видимому, слабо зависит от упругости оболочки. Более точное решение невозможно из-за ошибок порядка выше сжатия в функциях  $\varrho, \mu, \lambda$ .

Решение системы дифференциальных уравнений (10)–(12) для сферически-симметричной Земли и статического прилива можно получить численным интегрированием. Эти уравнения приводятся методом Лява к системе 6 линейных однородных уравнений первого порядка относительно функций  $H, T, R, L, M, N$ :

$$\begin{aligned} R &= \left( \frac{V_i}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi} \right) \frac{r^2}{a} g \\ H &= \frac{\eta}{V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \varphi} \frac{g}{W'} \frac{r^2}{a} \\ L &= (R' - 4\pi f \varrho H) r^2 \\ M &= \left( T' + H - \frac{2T}{r} \right) r^2 \mu \\ N &= (\lambda + 2\mu) H' + \lambda \left( \frac{2H}{r} - \frac{6T}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь, например,

$$u = H \frac{x}{r} \left( \frac{V_e}{r^2} \right) + T \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V_e}{r^2} \right)$$

и так далее. Все функции, кроме  $T$ , которая входит множителем в компоненты тангенциального смещения, сохраняют непрерывность на границе скачков плотности и упругих параметров.

Общее решение системы (17) имеет вид:

$$\Phi_k(r) = \sum_{i=1}^6 C_i y_{ik}(r)$$

$k = 1, 2, \dots, 6$ , где

$\Phi_k$  — одна из функций  $H, T, R, L, M, N$ , а  $y_{ik}$  — частные решения системы (17). Например,  $y_{1k}$  является частным решением, соответствующим условиям  $C_1 = 1, C_2 = C_3 = \dots = C_6 = 0$ .  $C_i$  — константы, которые определяются из граничных условий.

Основное затруднение при решении системы (16) для жидкого ядра состоит в том, что суточные частоты вынужденных колебаний близки к соответствующим частотам собственных колебаний Земли, и поэтому в расчетах необходимо учесть сжатие земного ядра, поскольку собственные колебания заметно зависят от сжатия.

Решение системы (16), следуя Молоденскому, ищем в виде:

$$\begin{aligned} V + \Psi &= \alpha \Phi + \omega^2 (V_1 + \Psi_1) \\ \Psi &= (2\omega + \sigma) \sigma \beta l z \cos(\sigma t - \lambda) - \omega^2 \Psi_1, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{W'}{4\pi f \varrho'} \Delta \Phi, \\ V &= V_e + \frac{\sigma + \omega}{\omega} \Phi + V_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Следует заметить, что когда вынуждающая частота  $\sigma$  приближается к частоте собственных колебаний, параметр  $\beta$  возрастает, вследствие чего возрастает и  $\Psi$ , так что в этом диапазоне частот прилив может отличаться от статического. Параметр  $\alpha$ , функции  $\Phi$ ,  $V_1$ ,  $\Psi_1$  с изменением  $\sigma$ , по-видимому, меняются мало.

Подставив (18) в систему (16) и отбросив члены порядка сжатия, если в них не входит  $\beta$ , для определения функций  $V_1$  и  $\Psi_1$  мы получим 2 уравнения:

$$\begin{aligned} V_1 + \Psi_1 &= -\frac{W'}{4\pi f \varrho'} \Delta V_1 \\ F(\Psi_1) &= \alpha \Phi - \beta \left( l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} \right) \cos(\sigma t - \lambda) + r l \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\sigma t - \lambda), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$r = 2 \left( \frac{\sigma + \omega}{\omega} \beta - \frac{\omega}{\sigma} \varepsilon \right).$$

Решение уравнения (19) ищем в виде:

$$\Phi = K \frac{l z}{r^2} \cos(\sigma t - \lambda) \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в (19), для функции  $K$  получим простое уравнение второго порядка:

$$K'' + \frac{2}{r} K' + \left( \frac{4\pi f \varrho'}{W'} - \frac{6}{r^2} \right) K = 0. \quad (22)$$



Второй член второго уравнения системы (20) тоже, очевидно, удовлетворяет уравнению (19), если функция  $K$  в нем выбрана следующим образом:

$$l \frac{\partial W}{\partial z} - z \frac{\partial W}{\partial l} = K_1 \frac{lz}{r^2}. \quad (23)$$

Функция  $K_1$  ограничена при  $r = 0$  и удовлетворяет уравнению то есть на границе ядро-мантия при  $r = b$

$$K_1(b) = -[w^2 lz]_b = [e^2 W'_0 \tau]_b. \quad (24)$$

Решение уравнения (20) ищем в виде ряда

$$\Psi_1 = \cos(\sigma t - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n r^n P_n(\cos \Theta), \quad (25)$$

где неизвестные функции  $\chi_n$  зависят только от  $r$ . Используя рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра, можно получить аналогичные рекуррентные соотношения для  $\chi_n$ . Подставляя их в (20) и приравнявая множители при  $P_n$ , получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка для функций  $\chi_n$ . В дальнейшем мы будем использовать только уравнение для  $\chi_2$ . Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{3}{W'} \varrho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \varrho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{\alpha K - \beta K_1}{r^2} \right)' r^6 \right]' = \\ = \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \varrho (\chi_2 r^5)' + 5\nu \varrho r^4. \end{aligned} \quad (26)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \eta_2 = \frac{W'}{3r} \left[ r - \frac{K_1}{W' r} \beta - \left( 1 - \frac{12}{7} \frac{\omega^2}{\sigma^2} \right) \chi_2' r + \right. \\ \left. + \frac{80}{63} \frac{\omega^2}{\sigma^2} (\chi_1 r^9)' r^{-6} + \frac{2(\omega + \sigma)(2\omega - \sigma)}{\sigma^2} \chi_2 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

и интегрируя уравнение (26) в пределах от  $b$  до  $c$  ( $c$  — граница внешнее-внутреннее ядро), получаем

$$\left[ \frac{3}{W'} \varrho r^6 \eta_2 + \frac{\beta}{W'} \varrho r^4 K_1 - \frac{1}{4\pi f} \left( \frac{\alpha K - \beta K_2}{r^2} \right)' r^6 \right]_c^b = 5\nu \int_c^b \varrho r^4 dr. \quad (28)$$

При интегрировании было введено условие

$$\int_c^b \varrho (\chi_2 r^5)' dr = 0.$$

Рассмотрим граничные условия. На поверхности Земли отсутствуют нормальные и тангенциальные напряжения, таким образом,

$$C_N = C_M = 0.$$

Из условия непрерывности производной потенциала для приливов второго порядка получаем

$$C_L = 5 - C_R.$$

Остальные 3 числа Лява должны быть получены из условий на границе ядро-мантия.

Так как ядро жидкое, то тангенциальная компонента смещения, пропорциональная  $T$ , может быть разрывной, остальные 5 функций должны быть непрерывны.

Условия на границе ядро-мантия могут быть получены следующим образом.

1. В ядре  $\mu = 0$ , то есть из (17) имеем

$$M(b) = 0,$$

где

$b$ , как уже отмечалось, радиус внешнего ядра. Физически это означает, что на границе ядро-мантия отсутствуют тангенциальные напряжения.

2. Функция  $R$  — непрерывна.

Так как

$$V = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 - (2\omega + \sigma) \beta \sigma r^2,$$

$$\alpha K = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$$

то

$$R(b) = \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha} K_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\alpha} r^2 \right]_b. \quad (30)$$

3. Функция  $L$  — непрерывна.

Используя уравнение для  $R'$  из системы (17) и исключая  $R'$  с помощью (30), получаем

$$\frac{1}{b^2} L(b) + 4\pi f \varrho_b H(b) = \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha} K'_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} K'_2 - 2(2\omega + \sigma) \sigma r \frac{\beta}{\alpha} \right]_b. \quad (31)$$

Используя условия (29)–(31), мы можем определить константы  $C_i$  как функции параметров  $\alpha_2$ ,  $\beta$  и  $(2\omega + \sigma) \sigma$ . Понимая, как известно,  $C_H = h$ ,  $C_T = l$ ,  $C_R = 1 + k$ , где  $h$ ,  $l$  и  $k$  — соответствующие числа Лява.

Условие непрерывности функции  $H$  дает нам важное уравнение, связывающее параметры  $\beta$  и  $\varepsilon$ . Подставляя во второе уравнение системы (17) внешний потенциал (5) и учитывая вид функции  $\eta_2$  имеем

$$\frac{3\eta_2}{W'} r^2 = H \alpha.$$

Подставляя это выражение в (28) и учитывая формулу (30) и последнее уравнение системы (17), получаем

$$\left[ L r^2 - 2 R r^3 - \frac{\beta}{z} r^4 \left( K_1' - \frac{2K_1}{r} + \frac{4\pi f \varrho}{W'} K_1 \right) \right]_c^b = -20\pi f \frac{v}{z} \int_c^b \varrho r^4 dr.$$

Параметр  $\varepsilon$ , определяющий нутацию системы координат в пространстве, можно получить из закона сохранения момента количества движения

$$\dot{\vec{M}} + [\vec{\omega}, \vec{M}] = \vec{L}, \quad (33)$$

где

$\vec{M}$  — кинетический момент,

$\vec{L}$  — момент внешних сил в подвижной системе координат. При составлении уравнения (33) не был учтен момент сил взаимодействия между мантией и ядром. Подставив в (33) конкретный вид  $\vec{\omega}$ , при малых значениях  $\varepsilon$  получим следующие проекции кинетического момента на подвижные оси:

$$\begin{aligned} M_x &= \omega(A \varepsilon \cos \sigma t - I_{xz}) + \Delta M_x \\ M_y &= \omega(A \varepsilon \sin \sigma t - I_{yz}) + \Delta M_y \\ M_z &= \omega C + \Delta M_z, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $A, B, C$  — главные моменты инерции,  $I_{xz}, I_{yz}$  — центробежные моменты инерции, члены  $\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$  определяются движением жидкого ядра. Нам нужно вычислить выражения

$$\Delta M_y = \sigma \Delta M_x$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= \frac{2\omega}{\sigma^2(2\omega + \sigma)} \int \varrho y \frac{\partial \Psi}{\partial z} d\tau + \frac{2}{\omega\sigma} \int \varrho y \frac{\partial \Psi}{\partial z} d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sigma(2\omega + \sigma)} \int \varrho \left( y \frac{\partial \Psi}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Вводя конкретный вид смещений и интегрируя по объему  $\tau$ , мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \Delta M_y &= \left[ (\beta - \varepsilon) A_1 + \frac{\sigma v}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \sin \sigma t \\ \frac{1}{\omega} \Delta M_x &= \left[ (\beta - \varepsilon) A_1 + \frac{\sigma v}{2\omega} (C_1 - A_1) \right] \cos \sigma t. \end{aligned} \quad (36)$$

Далее нам нужно получить выражения для центробежных моментов инерции. Молоденский считает при этом, что смещение границ скачка

плотности при деформации земли равносильно добавлению к каждой такой границе простого слоя с плотностью  $\varrho\eta/W'$ . Таким образом,

$$I_{yz} = -\frac{1}{4\pi f} \int_{\tau} \Delta V yz d\tau + \int_S \frac{\varrho\eta}{W'} yz ds. \quad (37)$$

Преобразуя объемный интеграл с помощью формулы Грина и учитывая то, что функция  $yz$  гармоническая, получаем

$$I_{yz} = -\frac{1}{4\pi f} \frac{V' - 4\pi f \frac{\varrho\eta}{W'} - \frac{2V}{r}}{yz} \int_S y^2 z^2 ds,$$

причем интегрирование идет только по поверхности Земли. Учитывая граничные условия на поверхности, получаем

$$I_{yz} = \frac{z}{3} Ma^2 k \sin \sigma t, \quad (38)$$

и внося (38) в (34), получаем следующие выражения для проекций кинетического момента на подвижные оси:

$$M_x = m \cos \sigma t$$

$$M_y = m \sin \sigma t$$

$$\frac{m}{\omega} = (A - A_1) \varepsilon + \beta A_1 + \frac{\sigma r}{2\omega} (C_1 - A_1) - \frac{z}{3} Ma^2 k. \quad (39)$$

Проекция момента внешних сил на подвижные координатные оси находим из выражения (5)

$$L_x = L \sin \sigma t$$

$$L_y = -L \cos \sigma t$$

$$L = \frac{g}{a} z(C - A). \quad (40)$$

Внес (39)–(40) в уравнение моментов, получаем простое уравнение для:

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \left[ \frac{A - A_1}{C} \varepsilon + \frac{A_1}{C} \beta + \frac{\sigma r}{2\omega} \frac{C_1 - A_1}{C} - \frac{z}{3} \frac{Ma^2 k}{C} \right] = z \frac{C - A}{Cq}. \quad (41)$$

В случае абсолютно твердой Земли уравнение (41) примет вид:

$$\varepsilon_0 - \frac{\sigma + \omega}{\omega} \frac{A}{C} \varepsilon_0 = \varrho \frac{C - A}{Cq}. \quad (42)$$



Поскольку в работе рассматривалась модель Земли с твердым внутренним ядром, к условиям (30)–(32) на границе внешнее ядро-мантия необходимо добавить и условия на границе внешнее-внутреннее ядро. Ввиду недостаточной изученности внутреннего ядра, Молоденский (1961) предлагает для простоты считать его однородным и несжимаемым и использовать хорошо известное аналитическое решение уравнений (17)

$$H = C_1 r + C_2 r^3, \quad T = \frac{1}{2} C_1 r^2 + \frac{5}{6} C_2 r^4, \quad R = C_3 r^4$$

Преобразуя уравнения системы (17), получаем

$$\begin{aligned} R' &= \frac{2}{r} R, & M &= \mu r^2 \left( \frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right), \\ N + \varrho(R + W' H) &= \mu \left( \frac{13}{2} \frac{H}{r} - 9 \frac{T}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

причем значения  $\varrho$  и  $\mu$  берутся, очевидно, для внутреннего ядра. На границе внутреннего ядра с жидким внешним ядром функции  $H$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $N$  должны быть непрерывны, то есть граничные условия будут аналогичны условиям (30)–(32).

1. Отсутствие тангенциальных напряжений на границе  $r = c$  ( $c$  — граница внутреннего ядра) дает  $M_c = 0$ , а с использованием (43) получаем

$$\left( \frac{5}{r} T - \frac{3}{2} H \right)_c = 0.$$

2. Аналогично, из (30) имеем

$$R(c) = \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha} K_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha} K_2 - (2\omega + \sigma) \sigma \frac{\beta}{\alpha} r^2 \right]_c.$$

3. Подобно предыдущему из (31) получаем

Условие непрерывности  $H$  (32), связывающее параметры  $\beta$  и  $\varepsilon$  вследствие, по-видимому, малого сжатия внутреннего ядра, остается прежним.

Наличие внутреннего ядра меняет также и уравнение моментов (41). В формулу (41) вместо  $C_1$  и  $A_1$  войдут моменты инерции слоя жидкости, заключенного между границами внутреннего и внешнего ядра,  $C_1 - C_2$  и  $A_1 - A_2$ , где  $C_2$  и  $A_2$  — моменты инерции внутреннего ядра. Если пренебречь, некоторыми малыми членами, то условие (41) запишется в виде:

$$\varepsilon - \frac{\sigma + \omega}{C \omega} \left[ A \varepsilon + (\beta - \varepsilon) (A_1 - A_2) - \frac{\alpha}{3} m a^2 k \right] = \alpha \frac{C - A}{C q}. \quad (44)$$

Комбинируя условия (32) и (44) мы можем получить частоту свободных колебаний, которая определяется из чандлеровского периода движения полюса. Так как при свободных колебаниях, как это следует из (32),

$$\frac{\varepsilon}{\beta} = \frac{\sigma_0 + \omega}{\omega}, \quad \text{где } \sigma_0 - \text{частота}$$

свободных колебаний, то в пренебрежении некоторыми малыми членами можно получить

$$\frac{\sigma_0}{\omega} = \frac{C - A}{A - A_1} \left( 1 - \frac{k}{k_0} \right), \quad (45)$$

где  $k_0$  — значение числа Лява  $k$  для жидкой Земли.

В данной работе проведены вычисления по вышприведенному алгоритму для модели Земли Ванга [Wang, 1972]. Сжатие Земли принято равным 0.003367, на границе внешнего ядра  $b = 0.5464$ :

$$W' = -1.0995, \quad \frac{C_1}{C} = 0.0926,$$

$$e = 0.002481.$$

Изменение плотности Земли с глубиной изображено на рис. 1.

Система уравнений (17) для оболочки решалась методом Рунге-Кутты. В качестве начального базиса на поверхности был взят единственный ортонормированный базис. Таким образом были получены 6 линейно независимых частных решений системы (17)  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_j}(r)$ .

Их значения на границе ядро-мантия представлены в таблице 1. Эти значения использовались в дальнейшем для решения граничных условий.

Функции  $K_1$  и  $K_2$  были получены численно интегрированием уравнения (22), которое также проводилось методом Рунге-Кутты. В результате были получены следующие значения:

при  $r = b = 0.5464$

$$\begin{aligned} K_1 &= 1, & K_2 &= 0, \\ K'_1 &= 3.2437, & K'_2 &= 3.3497, \end{aligned}$$

при  $r = c = 0.1901$

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.2112, & K_2 &= -8.0713, \\ K'_1 &= 0.1162, & K'_2 &= 126.6135, \end{aligned}$$

Используя полученные значения функций  $K$  и их производных, а также условия на границе ядро-мантия, можно получить значения чисел Лява  $h, l, k$  и параметра  $\alpha_1$ , как функций  $\beta$  и частот  $\sigma$  и  $\omega$ .

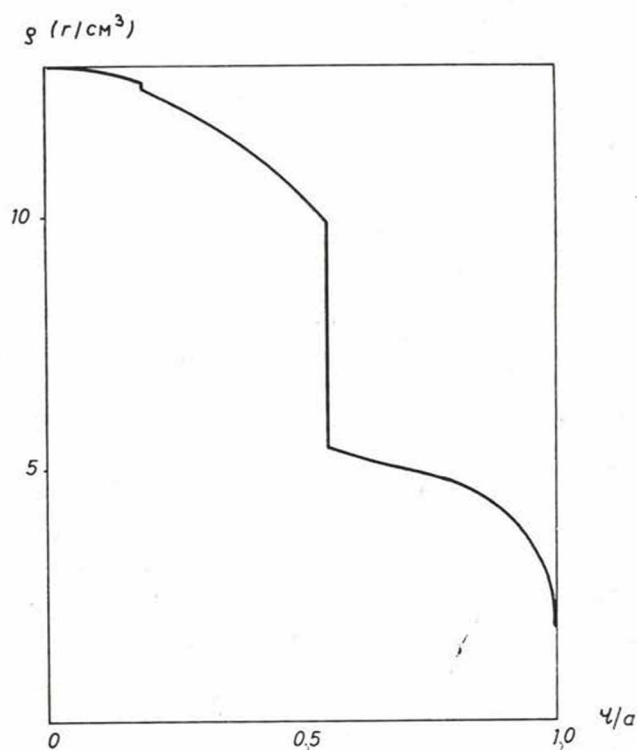


Рис. 1. Изменение плотности с глубиной для модели Ванга

Fig. 1. Density distribution in the case of Wang's earth model

Таблица I. — Table 1

Частные решения системы дифференциальных уравнений (17) на границе ядро-мантия  
Particular solutions of differential equation system (17) at the core-mantle boundary

	$\frac{\partial}{\partial H}$	$\frac{\partial}{\partial T}$	$\frac{\partial}{\partial R}$	$\frac{\partial}{\partial L}$	$\frac{\partial}{\partial M}$	$\frac{\partial}{\partial N}$
<i>H</i>	0,9196	-4,2668	0,4311	-0,1144	4,3060	-0,2321
<i>T</i>	0,3858	1,3332	-0,1678	0,0112	-1,5089	-0,1787
<i>R</i>	-2,3942	-1,5921	2,6385	-1,1274	0 7003	-0,5040
<i>L</i>	3,5488	7,4023	-4,2309	2,0708	-5,6998	-0,8597
<i>M</i>	-0,4499	-3,6176	0,5038	-0,0633	4,0450	0,3249
<i>N</i>	5,3033	48,1721	-7,1684	1,9206	-53,2462	-1,3370

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 0,5994 \kappa - 0,4516 \alpha_2 + 1,3344 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma) \sigma}{\omega^2} \beta \\
 k &= 0,3017 - 0,1199 \frac{\alpha_2}{\kappa} + 0,2248 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma) \sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{\kappa} \\
 l &= 0,0861 - 0,0098 \frac{\alpha_2}{\kappa} - 0,0124 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma) \sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{\kappa} \\
 h &= 0,6113 - 0,1065 \frac{\alpha_2}{\kappa} + 0,4462 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma) \sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Следует отметить хорошее согласие статических чисел Лява (их значения получаются из (46) при  $\sigma = \omega = 0$ ) с наблюдаемыми. Мельхиор в своей книге (Melchior 1972) на основании серии наблюдений состоящей из 50 000 дней дает следующие значения статических чисел Лява:

$$k = 0,316 \pm 0,010$$

$$h = 0,637 \pm 0,016.$$

В таблице 2 представлено изменение статических чисел Лява с глубиной.

Таблица 2. — Table 2

Зависимость статических чисел Лява от радиуса для модели Ванга  
Dependence of static Love numbers on the radius for Wang's earth model

$r$	$H_0$	$M_0$	$T_0$	$R_0$	$N_0$	$L_0$
1.00	0.6113	0.0000	0.0861	1.3017	0.0000	1.0949
0.99	0.6120	0.0058	0.0907	1.2775	0.0141	1.0226
0.98	0.6137	0.0101	0.0937	1.2607	0.0242	0.9708
0.97	0.6162	0.0158	0.0975	1.2375	0.0386	0.9000
0.95	0.6201	0.0259	0.1035	1.1952	0.0632	0.7743
0.93	0.6235	0.0350	0.1083	1.1568	0.0838	0.6650
0.90	0.6285	0.0498	0.1152	1.0928	0.1132	0.4986
0.85	0.6341	0.0688	0.1249	0.9915	0.1416	0.2720
0.80	0.6377	0.0783	0.1308	0.9067	0.1486	0.1007
0.75	0.6409	0.0803	0.1351	0.8142	0.1338	-0.0683
0.70	0.6425	0.0738	0.1371	0.7446	0.1046	-0.1848
0.65	0.6424	0.0571	0.1387	0.6766	0.0656	-0.2933
0.60	0.6394	0.0349	0.1404	0.6313	0.0581	-0.3660
0.55	0.6287	0.0000	0.1442	0.5974	0.1655	-0.4289



Отношение  $k/h$  с помощью (46) можно выразить следующим образом:

$$k = 0,4935 h - 0,0674 \frac{\alpha_2}{\kappa} + 0,0047 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma)\sigma}{\omega^2} \frac{\beta}{\kappa}.$$

В данном случае интересна слабая зависимость этого отношения от частоты вынуждающей силы, близость его к статическому значению.

Параметр  $\alpha_2$  можно определить из условий на границе ядро внешнее-внутреннее. Для нашей модели Земли мы получили

$$\alpha_2 = 0,0059 \kappa + 0,0132 \times 10^{-3} \frac{(2\omega + \sigma)\sigma}{\omega^2} \beta.$$

Поскольку параметр  $\kappa$ , как уже замечалось выше, имеет порядок  $\sim 10^{-7}$ , то  $\alpha_2$  имеет, соответственно, порядок  $\sim 10^{-10}$ . Это указывает на то, что влиянием внутреннего ядра на числа Лява и приливные коэффициенты, по-видимому, можно пренебречь. Следует заметить, что к такому же выводу пришел Молоденский (1961), даже в широких пределах меняя  $\mu$  ядра ( $\mu$  от 0 до  $\infty$ ).

Далее используя условия (41)–(42), мы можем получить отношение нутаций реальной и абсолютно твердой Земли в функции частоты и резонансного параметра  $\beta$ :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + 0,0963 \left( \frac{\beta}{\kappa} - 3,248 \right) \frac{\sigma + \omega}{\omega}.$$

И наконец, используя граничное условие (32), мы можем значение резонансного параметра в зависимости от частоты приливной силы

$$\frac{\beta}{\kappa} = \frac{7,1345 - 2,6607 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}}{0,03496 - 9,2578 \frac{\sigma + \omega}{\sigma}}. \quad (47)$$

Частота свободных колебаний получается из (47) следующей

$$\frac{\sigma_0 + \omega}{\sigma_0} = 0,003776,$$

что соответствует периоду „почти суточной” нутации на 5.45 минут короче звездных суток. Период Чандлера рассчитывается по формуле (45).  $k_0$  для нашей модели равно 0.9567, таким образом, чандлеровский период получается равным 442.6 дней, что заметно отличается от периода, полученного Молоденским (433 дня), но близко к периоду, рассчитанному Джеффрисом (Jeffreys 1959), (448 – 7 дней), а также к реальному периоду Чандлера, получаемому из наблюдений, который считается равным, примерно, 450 дням. Некоторое отличие

значения, приводимого Молоденским, по-видимому, объясняется несколько завышенным моментом инерции ядра, принятым им в расчетах, так как с уменьшением момента инерции ядра период Чандлера увеличивается.

В таблице 3 представлены значения параметра  $\frac{\beta}{\kappa}$ , рассчитанные для частот главных приливных волн, динамические значения чисел Лява  $h, k, \delta, \gamma$ , а также отношения амплитуд вынужденной нутации Земли с жидким ядром и абсолютно твердой Земли.

Таблица 3. — Table 3.

Значение параметров  $\frac{\beta}{\kappa}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  и динамических чисел Лява для главных приливных волн

The values of parameters  $\frac{\beta}{\kappa}, \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  and dynamic Love numbers for the main earth tide waves

Волна	$\frac{\sigma + \omega}{\omega}$	$\frac{\beta}{\kappa}$	$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot 10^3$	$h$	$k$	$\delta$	$\gamma$
OO <sub>1</sub>	$-\frac{1}{13,7}$	-11,69	105	0,6120	0,3020	1,1590	0,6900
$\varphi_1$	$-\frac{1}{183}$	-463,67	246	0,6135	0,3028	1,1593	0,6893
K <sub>565</sub>	$-\frac{1}{6879}$	212,35	-3,0	0,6113	0,3017	1,1588	0,6904
K <sub>1</sub>	0	—	0	0,6113	0,3017	1,1588	0,6904
K <sub>545</sub>	$\frac{1}{6879}$	196,45	2,7	0,6113	0,3017	1,1588	0,6904
P <sub>1</sub>	$\frac{1}{183}$	83,30	42,1	0,6117	0,3019	1,1589	0,6902
O <sub>1</sub>	$\frac{1}{13,7}$	9,6	44,7	0,6120	0,3020	1,1589	0,6901

Легко видеть, что разность чисел Лява для главных суточных волн  $K_1$  и  $O_1$  весьма невелика

$$\gamma(O_1) - \gamma(K_1) = -0,0003$$

$$\delta(O_1) - \delta(K_1) = 0,0001,$$

и даже эти разности возникают, скорее, в результате ошибок расчета. Кроме того, ошибка определения чисел Лява из приливных наблюдений составляет, примерно,  $\sim 10^{-2} \sim 10^{-3}$ , таким образом, полученные разности на один-два порядка меньше достижимой в современных условиях точности. Таким образом, если рассмотренная в данной

работе теория нутации дает достаточное приближение к реальному явлению, то перед исследователями приливов встает важная задача объяснения того, чем вызваны наблюдаемые разности в числах Лява для главных приливных волн. Из наблюдений получаются следующие разности

$$\delta(O_1) - \delta(K_1) = 0,001 \div 0,040$$

$$\gamma(O_1) - \gamma(K_1) = -0,011 \div -0,093,$$

и даже если принять, что ошибка в их определении  $\sim 10^{-2}$ , то тем не менее для некоторых станций наличие таких разностей будет все же бесспорным.

Однако по нашему мнению, эти разности вызваны, скорее, влиянием косвенного эффекта приливов, а не возмущениями Земли. То, что разности, лежащие вне пределов ошибки, наблюдаются, в основном, на станциях, близких к морям и океанам, то, что существует ряд станций, где разности имеют противоположный знак, некоторым образом подтверждает наше предположение.

И наконец, мы можем рассчитать поправки к амплитудам вынужденной нутации, получаемым в предположения абсолютной твердости Земли. Следует сразу заметить, что геофизические следствия проявляют себя в наблюдаемых астрономических величинах довольно незначительно. Вообще, для их обнаружения обычно исключают влияние всех эффектов вращения Земли как абсолютно твердого тела и считают, что отклонения наблюдений от данных этой теории возникают в результате отличия свойств Земли от свойств абсолютно твердого тела и других геофизических причин. Полагают, что тщательный анализ этих отклонений позволит получить на основе астрономических наблюдений данные, которые могут служить критерием справедливости тех или иных гипотез о внутреннем строении Земли.

Возьмем постоянную нутации  $9''.2075 \pm 0''.0020$  (Ситтер) и используя значения  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  из таблицы 3 рассчитаем расхождение между наблюдаемым и теоретическим значением поправки в малой полуси нутационного эллипса. Оно получается равным  $0''.0016$ , то есть практически лежит в пределах ошибки определения постоянной нутации. Этот вывод имеет очень большое значение, поскольку амплитуды короткопериодических членов нутации определяются не непосредственно из астрономических наблюдений, точность которых недостаточна для их обнаружения, а из анализа наблюдаемых амплитуд главных членов прецессии и нутации. Теоретические расчеты, применявшиеся до сих пор для определения амплитуд короткопериодических членов основывались на предположении, что Земля идеально тверда. Предполагалось, что поскольку во внешнем ядре могут происходить некоторые движения, сопровождаемые резонансными явлениями, то в некоторые из теоретических амплитуд нутационных движений не-

бходимо внести соответствующие поправки, вызванные нутационным движением жидкого ядра Земли. Настоящий расчет показывает, что эти поправки лежат в пределах ошибок астрономических наблюдений.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Джеффрис, Г. (1960): Земля, ее происхождение, история и строение, ИЛ, Москва
- Melchior, P. (1972): *Physique et Dynamique planétaires, géodynamique*, volume 3, Vander
- Молоденский, М. С. (1961): Теория нутации и суточных земных приливов, в книге "Земные приливы и нутация Земли", изд. АН СССР, Москва
- Молоденский, М. С. и Крамер, М. В. (1961): Числа Лява для статических земных приливов 2 и 3-го порядков, в книге "Земные приливы и нутация Земли", изд. АН СССР, Москва
- Wang, C. (1972): A Simple Earth Model, JGR, vol. 77, No. 23. 4318-4329